电子环的自场与振荡方程

王德焴　馬中玉　沈双林　李祝霞　王書暖

本文用单粒子近似方法，讨论了在空间电荷自电磁场和理想"电子感应加速器"型外磁场的作用下，椭圆截面电子环（严格地说，应为电子-离子环）中一个电子的振荡方程。这里，圆筒形器壁效应的修正，用无限细线电子环在无限长圆筒形理想导体壁上的镜像场进行近似。线性化的电子振荡方程，给出了电子环径向和轴向的聚焦条件。在相对论情况下，电子环内一定量的正离子可以起到自聚焦作用。电子环的自场产生一个扩张力，为了把电子环束缚在一定的轨道上，外磁场就必须增大。

一、引　　言

电子环加速器首先要有一个稳定的强流电子环，并俘获少量离子。要讨论强流电子环的运动及其稳定性，需要建立一个运动方程。但是，这种强流电子-离子集团的问题，是一个多体问题，它介于加速器物理和等离子体物理之间。多体问题的讨论，是非常复杂的，目前还没有一种比较完善的方法。

伟大领袖毛主席指出：**"在复杂的事物的发展过程中，有许多的矛盾存在，其中必有一种是主要的矛盾，由于它的存在和发展，规定或影响着其他矛盾的存在和发展。"**在本文中，我们对电子环采用了"单粒子近似"。讨论电子环中一个电子的运动，把其他电子、离子对它的作用，看作是平均场，从而考察这个电子在其他粒子的平均场以及外场作用下的运动方程。而其他粒子的平均场应该是一个自洽场，但是，自洽场的解析形式是很难求得的。为了讨论的简便，我们作进一步的假设：假定电子环的平均半径R远大于其横截面的最大尺度，而横截面近似地认为是个椭圆。在电子环外没有电子和离子，在电子环内电子和离子均匀分布。用这样的电子环所产生的自电磁场代替平均场。在电子环靠近俘获室器壁时，器壁效应不能忽略，我们近似地用无限细线电子环在无限长圆筒形理想导体壁上所产生的镜像场进行修正。

尽管"单粒子近似"是个简单的方法，却也揭示了电子环中电子运动的一些性质。在此基础上，就可进一步讨论更复杂的过程，即集团作用，来研究电子环的稳定性问题。

二、自由空间中电子环自电磁场的标势和矢势

我们选用圆柱座标系，则电子和离子的体电荷密度分布可表达为：

$$\rho_l=\begin{cases}\rho_{l0}, & \left[\dfrac{(r-R)^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}\leqslant 1\right]\\ 0. & \left[\dfrac{(r-R)^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}>1\right]\end{cases} \tag{1}$$

在上式中，ρ_{l0} 为常数，足标 l 等于 1 时，表示电子，l 等于 2 时，表示离子，后文均同。a 和 b 表示电子离子环横向椭圆截面的半轴，R 为电子环的平均半径。

再进一步作近似，认为电子和离子以均匀速率 v_l 在环内运动。由于粒子的横向（径向 $\vec{i_r}$ 和轴向 $\vec{i_z}$ 的合成）速度比纵向（即角向 $\vec{i_\theta}$）速度要小得多，可以忽略不计，因此，粒子的运动速度 $\vec{v_l}$ 可以近似地表达为：

$$\vec{v_l}=\vec{i_r}v_{lr}+\vec{i_\theta}v_{l\theta}+\vec{i_z}v_{lz}\approx\vec{i_\theta}v_l. \tag{2}$$

这样，粒子在环内任一点 $M(r,\theta,z)$ 的标势和矢势，可用积分形式表达为：

$$\begin{aligned}\varphi_l^0(r,\theta,z)&=\iiint\frac{\rho_l d\tau'}{|\overrightarrow{MM'}|}\\&=\iiint\frac{\rho_l r'dr'd\theta'dz'}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos(\theta-\theta')+(z-z')^2}},\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\vec{A}_l^0(r,\theta,z)&=\frac{1}{c}\iiint\frac{\vec{i_l}d\tau'}{|\overrightarrow{MM'}|}\\&=\frac{1}{c}\iiint\frac{\vec{i_{\theta'}}\rho_l v_l d\tau'}{|\overrightarrow{MM'}|}\\&=\frac{v_l}{c}\iiint\frac{\rho_l[\vec{i_r}\sin(\theta-\theta')+\vec{i_\theta}\cos(\theta-\theta')]r'dr'd\theta'dz'}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos(\theta-\theta')+(z-z')^2}}\\&=\vec{i_\theta}\frac{v_l}{c}\iiint\frac{\rho_l\cos(\theta-\theta')r'dr'd\theta'dz'}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos(\theta-\theta')+(z-z')^2}}.\end{aligned} \tag{4}$$

对于积分变量 θ'，作线性变换：

$$\theta'-\theta=2\psi-\pi, \tag{5}$$

并代入积分式(3)和(4)，经运算后得：

$$\varphi_l^0(r,z)=\iint K(k)\frac{4\rho_l r'dr'dz'}{\sqrt{(r+r')^2+(z-z')^2}}, \tag{6}$$

$$\vec{A}_l^0(r,z)=\vec{i_\theta}\frac{v_l}{c}\iint\left[\left(\frac{2}{k^2}-1\right)K(k)-\frac{2}{k^2}E(k)\right]\frac{4\rho_l r'dr'dz'}{\sqrt{(r+r')^2+(z-z')^2}}. \tag{7}$$

这里，$K(k)$ 和 $E(k)$ 分别为第一类和第二类椭圆积分，其定义为：

$$K(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}d\psi, \tag{8}$$

$$E(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\,d\psi, \tag{9}$$

在上两式中，

$$k^2=\frac{4rr'}{(r+r')^2+(z-z')^2}<1. \tag{10}$$

对于积分式(6)和(7)，只能进行近似运算。因为，点 M 和 M' 均在环内，所以，$\frac{r-r'}{R}$

和$\frac{z-z'}{R}$均可看成是一级小量。同样，经过运算后可以知道$k\simeq1$。为运算方便计，再作线性变换：

$$\left.\begin{aligned} r'&=R+x'=R\left(1+\frac{x'}{R}\right),\\ r&=R+x=R\left(1+\frac{x}{R}\right). \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

查表[1]可得椭圆函数的展开式：

$$K(k)=\ln\frac{4}{\sqrt{1-k^2}}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{2i-1}{2i}\right)^2\left[\ln\frac{4}{\sqrt{1-k^2}}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(2i-1)}\right](1-k^2)^n, \tag{12}$$

$$E(k)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{2i-1}{2i}\right)^2\frac{2n}{2n-1}\left[\ln\frac{4}{\sqrt{1-k^2}}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(2i-1)}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2n(2n-1)}\right](1-k^2)^n. \tag{13}$$

现在，可对积分式(6)和(7)中的被积函数按级数形式进行展开，取近似至二级小量。然后，依x'和z'的幂次数分类整理，即可得到展开式：

$$\varphi_l^0(x,z)\simeq\iint\rho_l\left[\left(\frac{x}{R}+\frac{z^2-7x^2}{R^2}\right)+\left(\frac{1}{R}-\frac{x}{4R^2}\right)x'-\frac{z}{4R^2}z'+\frac{1}{8R^2}x'^2+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{8R^2}z'^2\right]dx'dz'+\iint\rho_l\left[\left(2-\frac{x}{R}+\frac{5x^2-z^2}{8R^2}\right)+\left(\frac{1}{R}-\frac{x}{4R^2}\right)x'+\frac{z}{4R^2}z'-\right.$$
$$\left.-\frac{3}{8R^2}x'^2-\frac{1}{8R^2}z'^2\right]\ln\sqrt{\frac{x'^2+z'^2}{(x-x')^2+(z-z')^2}}\,dx'dz'+\iint\rho_l\left[\left(2-\frac{x}{R}+\right.\right.$$
$$\left.+\frac{5x^2-z^2}{8R^2}+\frac{3xz^2-7x^3}{16R^3}\right)+\left(\frac{1}{R}-\frac{x}{4R^2}+\frac{x^2+z^2}{16R^3}\right)x'+\left(\frac{z}{4R^2}-\frac{3xz}{8R^3}\right)z'+$$
$$+\left(\frac{3x}{16R^3}-\frac{3}{8R^2}\right)x'^2-\frac{z}{8R^3}x'z'+\left(\frac{3x}{16R^3}-\frac{1}{8R^2}\right)z'^2+\frac{3}{16R^3}x'^3+$$
$$\left.+\frac{1}{16R^3}x'z'^2\right]\ln\frac{8R}{\sqrt{x'^2+z'^2}}dx'dz', \tag{14}$$

$$\vec{A}_l^0(x,z)\simeq\vec{i}_\theta\frac{v_l}{c}\iint\rho_l\left[\left(-4+\frac{3x}{R}-\frac{21x^2+z^2}{8R^2}\right)+\left(\frac{5x}{4R^2}-\frac{1}{R}\right)x'+\frac{z}{4R^2}z'+\right.$$
$$\left.+\frac{3}{8R^2}x'^2-\frac{1}{8R^2}z'^2\right]dx'dz'+\vec{i}_\theta\frac{v_l}{c}\iint\rho_l\left[\left(2-\frac{x}{R}+\frac{9x^2+3z^2}{8R^2}\right)+\left(\frac{1}{R}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{5x}{4R^2}\right)x'-\frac{3z}{4R^2}z'+\frac{1}{8R^2}x'^2+\frac{3}{8R^2}z'^2\right]\ln\sqrt{\frac{x'^2+z'^2}{(x-x')^2+(z-z')^2}}dx'dz'+$$
$$+\vec{i}_\theta\frac{v_l}{c}\iint\rho_l\left[\left(2-\frac{x}{R}+\frac{9x^2+3z^2}{8R^2}-\frac{19x^3+9xz^2}{16R^3}\right)+\left(\frac{1}{R}-\frac{5x}{4R^2}+\right.\right.$$
$$\left.+\frac{21x^2-3z^2}{16R^3}\right)x'+\left(\frac{9xz}{8R^3}-\frac{3z}{4R^2}\right)z'+\left(\frac{1}{8R^2}-\frac{x}{16R^3}\right)x'^2+\frac{z}{2R^3}x'z'+$$
$$\left.+\left(\frac{3}{8R^2}-\frac{9x}{16R^3}\right)z'^2-\frac{1}{16R^3}x'^3-\frac{3}{16R^3}x'z'^2\right]\ln\frac{8R}{\sqrt{x'^2+z'^2}}dx'dz'. \tag{15}$$

(14)和(15)式中有些项的积分是比较困难和繁复的，我们专门作了计算（计算结果列在附录中)。这样便得到积分式(14)和(15)的结果，再依 x 和 z 的幂次数分类整理，即可得到：

$$\varphi_l^0(x,z)=\rho_{l0}\pi ab\Big\{\Big[(P+2)-\frac{P}{64}\frac{3a^2+b^2}{R^2}+\frac{1}{128}\frac{a^3-11a^2b-ab^2+3b^3}{(a+b)R^2}\Big]+$$
$$+\Big[\Big(\frac{a}{a+b}-\frac{P}{2}\Big)+\frac{3P}{128}\frac{a^2+b^2}{R^2}+\frac{3}{256}\frac{a^2+4ab+b^2}{R^2}\Big]\Big(\frac{x}{R}\Big)+\Big[-2\frac{R^2}{a(a+b)}+\frac{5P}{16}-$$
$$-\frac{1}{16}\frac{11a^2+12ab+3b^2}{(a+b)^2}\Big]\Big(\frac{x}{R}\Big)^2+\Big[-2\frac{R^2}{b(a+b)}-\frac{P}{16}+$$
$$+\frac{1}{16}\frac{3a^2+4ab+3b^2}{(a+b)^2}\Big]\Big(\frac{z}{R}\Big)^2+\Big[\frac{1}{3}\frac{(a+2b)R^2}{a(a+b)^2}-\frac{7}{32}(P+2)\Big]\Big(\frac{x}{R}\Big)^3+\Big[\frac{R^2}{(a+b)^2}+$$
$$+\frac{3}{32}(P+2)\Big)\Big]\Big(\frac{x}{R}\Big)\Big(\frac{z}{R}\Big)^2-\frac{1}{48}\frac{(13a^2+39ab+24b^2)R^2}{a(a+b)^3}\Big(\frac{x}{R}\Big)^4-$$
$$-\frac{1}{8}\frac{(7a+5b)R^2}{(a+b)^3}\Big(\frac{x}{R}\Big)^2\Big(\frac{z}{R}\Big)^2+\frac{1}{48}\frac{(3a+b)R^2}{(a+b)^3}\Big(\frac{z}{R}\Big)^4\Big\}, \tag{16}$$

$$\vec{A}_l^0(x,z)=\vec{i}_\varphi\frac{v_l}{c}\rho_{l0}\pi ab\Big\{\Big[(P-2)+\frac{P}{64}\frac{a^2+3b^2}{R^2}+$$
$$+\frac{1}{128}\frac{13a^3+17a^2b+11ab^2-b^3}{(a+b)R^2}\Big]+\Big[\Big(\frac{3a+2b}{a+b}-\frac{P}{2}\Big)-\frac{P}{128}\frac{a^2+9b^2}{R^2}-$$
$$-\frac{1}{256}\frac{a^3+5a^2b+45ab^2+9b^3}{(a+b)R^2}\Big]\Big(\frac{x}{R}\Big)+\Big[-2\frac{R^2}{a(a+b)}+\frac{9P}{16}-$$
$$-\frac{1}{16}\frac{43a^2+68ab+27b^2}{(a+b)^2}\Big]\Big(\frac{x}{R}\Big)^2+\Big[-2\frac{R^2}{b(a+b)}+\frac{3P}{16}+$$
$$+\frac{1}{16}\frac{3a^2-4ab-5b^2}{(a+b)^2}\Big]\Big(\frac{z}{R}\Big)^2+\Big[\frac{1}{3}\frac{(a+2b)R^2}{a(a+b)^2}-\frac{19}{32}(P+2)\Big]\Big(\frac{x}{R}\Big)^3+\Big[\frac{R^2}{(a+b)^2}-$$
$$-\frac{9}{32}(P+2)\Big]\Big(\frac{x}{R}\Big)\Big(\frac{z}{R}\Big)^2-\frac{1}{48}\frac{(17a^2+51ab+32b^2)R^2}{a(a+b)^3}\Big(\frac{x}{R}\Big)^4-$$
$$-\frac{1}{8}\frac{(11a+9b)R^2}{(a+b)^3}\Big(\frac{x}{R}\Big)^2\Big(\frac{z}{R}\Big)^2-\frac{1}{48}\frac{(8a^2+9ab+3b^2)R^2}{b(a+b)^3}\Big(\frac{z}{R}\Big)^4\Big\}. \tag{17}$$

在上两式中，引进一个常数：

$$P=2\ln\frac{16R}{a+b}-1. \tag{18}$$

三、无限长圆筒形理想导体中电子环的自电磁场

电子环处在加速器的俘获室内，它所产生的自电磁场，除了电子环在自由空间中产生的自电磁场外，还应加上由俘获室器壁上感生电荷所产生的场，即所谓镜像场。俘获室是一个内壁涂了一层金属的陶瓷圆筒，它的直径与长度差不多。

由于粒子在环内是均匀分布，并且不随时间变化。所以，这样的镜像场只有静电镜像，而没有磁镜像。镜像静电场是一种次级效应，为了计算方便，我们作下述假设：

(i) 电子环的 z 轴和俘获室中心轴重合；

(ii) 将俘获室看成为半径等于 R_e 的无限长圆筒，其内壁金属则认为是理想导体；

(iii) 将电子环看成是无限细的线环。

根据无限细电子环在无穷长波导管中的镜像场的计算，我们得到静电镜像场的标势：

$$\varphi^i(x,z)=-\frac{Q}{2\pi R}\left[4F+4K\left(\frac{x}{R}\right)+2(Y-K)\left(\frac{x}{R}\right)^2-2Y\left(\frac{z}{R}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\frac{2}{3}(V+2K-Y)\left(\frac{x}{R}\right)^3-2V\left(\frac{x}{R}\right)\left(\frac{z}{R}\right)^2\right]. \tag{19}$$

上式中，Q 是线电子环的总电荷，常数值 F，K，Y，V 是一些修正贝塞尔函数的积分：

$$\left.\begin{aligned}F&=\int_0^\infty\frac{K_0(Sy)}{I_0(Sy)}[I_0(y)]^2dy,\\K&=\int_0^\infty y\frac{K_0(Sy)}{I_0(Sy)}I_0(y)I_1(y)dy,\\Y&=\int_0^\infty y^2\frac{K_0(Sy)}{I_0(Sy)}[I_0(y)]^2dy,\\V&=\int_0^\infty y^3\frac{K_0(Sy)}{I_0(Sy)}I_0(y)I_1(y)dy,\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

在上式中，引进一个参数：

$$S=\frac{R_e}{R}. \tag{21}$$

在计算电子环的自电磁场前，我们再作一些假设：

(i) 设环内的电子总数为 N_1，它所俘获的正离子为质子，其总数为 N_2，而且 $N_1\gg N_2$。

(ii) 设$\beta_l=\frac{v_l}{c}$，而且 $\beta_1\gg\beta_2$。和上一假设相联系，可以看出，质子所产生的自磁场，同电子所产生的自磁场相比，要小得很多，完全可以忽略不计。

(iii) 设电子的静止质量为 m，电荷为 e，并引进一个参数：

$$\nu_l=\frac{N_l}{2\pi R}\cdot\frac{e^2}{mc^2}, \tag{22}$$

这样，便可得到：

$$(\rho_1+\rho_2)\pi ab=\frac{N_1-N_2}{2\pi R}e=(\nu_1-\nu_2)\frac{mc^2}{e}. \tag{23}$$

对电子环自电磁场的标势和矢势：

$$\varphi(x,z)=\varphi_1^0(x,z)+\varphi_2^0(x,z)+\varphi^i(x,z), \tag{24}$$

$$\vec{A}(x,z)=\vec{A}_1^0(x,z)+\vec{A}_2^0(x,z)\approx\vec{A}_1^0(x,z). \tag{25}$$

分别求梯度和旋度，便可得到：

$$\vec{E}(x,z)=\vec{i}_r\frac{(\nu_1-\nu_2)mc^2}{eR}\left\{\left[4K+\left(\frac{P}{2}-\frac{a}{a+b}\right)-\frac{3P}{128}\frac{a^2+b^2}{R^2}-\frac{3}{256}\frac{a^2+4ab+b^2}{R^2}\right]+\right.$$
$$+\left[4(Y-K)+\frac{4R^2}{a(a+b)}-\frac{5P}{8}+\frac{1}{8}\frac{11a^2+12ab+3b^2}{(a+b)^2}\right]\left(\frac{x}{R}\right)+\left[2(V+2K-Y)-\right.$$
$$\left.-\frac{(a+2b)R^2}{a(a+b)^2}+\frac{21}{32}(P+2)\right]\left(\frac{x}{R}\right)^2-\left[2V+\frac{R^2}{(a+b)^2}+\frac{3}{32}(P+2)\right]\left(\frac{z}{R}\right)^2+$$
$$\left.+\frac{1}{12}\frac{(13a^2+39ab+24b^2)R^2}{a(a+b)^3}\left(\frac{x}{R}\right)^3+\frac{1}{4}\frac{(7a+5b)R^2}{(a+b)^3}\left(\frac{x}{R}\right)\left(\frac{z}{R}\right)^2\right\}+$$

$$+\vec{i}_z\frac{(\nu_1-\nu_2)mc^2}{eR}\left(\frac{z}{R}\right)\left\{\left[-4Y+4\frac{R^2}{b(a+b)}+\frac{P}{8}-\frac{1}{8}\frac{3a^2+4ab+3b^2}{(a+b)^2}\right]-\right.$$

$$-\left[4V+2\frac{R^2}{(a+b)^2}+\frac{3}{16}(P+2)\right]\left(\frac{x}{R}\right)+\frac{1}{4}\frac{(7a+5b)R^2}{(a+b)^3}\left(\frac{x}{R}\right)^2-$$

$$\left.-\frac{1}{12}\frac{(3a+b)R^2}{(a+b)^3}\left(\frac{z}{R}\right)^2\right\}, \tag{26}$$

$$\vec{B}(x,z)=\vec{i}_r\frac{\nu_1\beta_1 mc^2}{eR}\left(\frac{z}{R}\right)\left\{\left[\frac{4R^2}{b(a+b)}-\frac{3P}{8}-\frac{1}{8}\frac{3a^2-4ab-5b^2}{(a+b)^2}\right]+\right.$$

$$+\left[-\frac{2R^2}{(a+b)^2}+\frac{9}{16}(P+2)\right]\left(\frac{x}{R}\right)+\frac{1}{4}\frac{(11a+9b)R^2}{(a+b)^3}\left(\frac{x}{R}\right)^2+$$

$$\left.+\frac{1}{12}\frac{(8a^2+9ab+3b^2)R^2}{b(a+b)^3}\left(\frac{z}{R}\right)^2\right\}+\vec{i}_z\frac{\nu_1\beta_1 mc^2}{eR}\left\{\left[\left(\frac{P}{2}+\frac{a}{a+b}\right)+\frac{P}{128}\frac{a^2-3b^2}{R^2}+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{1}{256}\frac{25a^3+29a^2b-23ab^2-11b^3}{(a+b)R^2}\right]-\left[\frac{4R^2}{a(a+b)}+\frac{3P}{8}+\frac{1}{8}\frac{3a^2-4ab-5b^2}{(a+b)^2}\right]\left(\frac{x}{R}\right)+$$

$$+\left[-\frac{R^2}{(a+b)^2}+\frac{9P}{32}-\frac{1}{8}\frac{90a^2+163ab+74b^2}{(a+b)^2}\right]\left(\frac{x}{R}\right)^2-\left[\frac{(2a+b)R^2}{b(a+b)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{3P}{32}-\frac{1}{8}\frac{3a^2+11ab+7b^2}{(a+b)^2}\right]\left(\frac{z}{R}\right)^2+\frac{1}{12}\frac{(11a+9b)R^2}{(a+b)^3}\left(\frac{x}{R}\right)^3+$$

$$\left.+\frac{1}{4}\frac{(8a^2+9ab+3b^2)R^2}{b(a+b)^3}\left(\frac{x}{R}\right)\left(\frac{z}{R}\right)^2\right\}. \tag{27}$$

四、外　磁　场

为了把电子稳定地约束在一定轨道上，必须有一个外磁场。当外磁场随时间上升时，电子环受到压缩；由于电子速度接近光速，在旋转一圈的过程中，外磁场改变很小，即所谓绝热压缩。我们可把外磁场看作是似稳磁场，这种外磁场，即理想“电子感应加速器”型场，必须满足下面两个条件：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\vec{H}}{\partial\theta}=0,\\&H_r(r,z)|_{z=0}=0.\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

外磁场$\vec{H}$既然是似稳磁场，它就适合下面等式：

$$\left.\begin{aligned}&\nabla\cdot\vec{H}=\frac{1}{r}\frac{\partial(rH_r)}{\partial r}+\frac{\partial H_z}{\partial z}=0,\\&\nabla\times\vec{H}=\vec{i}_r\left(-\frac{\partial H_\theta}{\partial z}\right)+\vec{i}_\theta\left(\frac{\partial H_r}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial r}\right)+\vec{i}_z\left[\frac{1}{r}\frac{\partial(rH_\theta)}{\partial r}\right]=0.\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

利用这个等式，我们将外磁场$\vec{H}$在$r=R,z=0$处展开，并取近似到二级小量：

$$\vec{H}(r,z)=\vec{i}_r H_z(R,0)\left[-n\left(\frac{z}{R}\right)+d\left(\frac{x}{R}\right)\left(\frac{z}{R}\right)\right]+\vec{i}_\theta H_\theta(R,0)\left[1-\left(\frac{x}{R}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{x}{R}\right)^2\right]+\vec{i}_z H_z(R,0)\left[1-n\left(\frac{x}{R}\right)+\frac{d}{2}\left(\frac{x}{R}\right)^2+\left(\frac{n}{2}-\frac{d}{2}\right)\left(\frac{z}{R}\right)^2\right], \tag{30}$$

在这里，常数n和d分别是：

$$n=-\frac{R}{H_z(R,0)}\frac{\partial H_z}{\partial r}\bigg|_{\substack{r=R\\z=0}},\quad d=-\frac{R}{H_z(R,0)}\frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2}\bigg|_{\substack{r=R\\z=0}}. \tag{31}$$

从展开式(30)可以看出，对于理想"电子感应加速器"型场，其方位角分量 H_θ 与 z 是无关的。对于两个互相平行、而且同轴的单线圈圆电流所产生的外磁场，没有方位角分量，也就是说：

$$H_\theta(r,z)=0. \tag{32}$$

五、电子环中电子的横向振荡方程

由于电子环的自电磁场 $\vec{E}$，$\vec{B}$，以及外磁场 $\vec{H}$ 均没有 θ 方向的分量。因此，环内任一电子在柱座标中，所满足的劳伦茨方程为：

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dt}(m\gamma\dot{r})-m\gamma r\dot{\theta}^2&=eE_r+\frac{e}{c}r\dot{\theta}(B_z+H_z),\\ \frac{d}{dt}(m\gamma\dot{z})&=eE_z-\frac{e}{c}r\dot{\theta}(B_r+H_r).\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

这里，γ 为相对论因子，其定义如下：

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta_1^2}}. \tag{34}$$

为了使电子约束在平均半径为 R 的圆形轨道上，要求满足下面的平衡条件：

$$\frac{d}{dt}(m\gamma\dot{r})\bigg|_{\substack{r=R\\z=0}}=0, \tag{35}$$

$$\frac{d}{dt}(m\gamma\dot{z})\bigg|_{\substack{r=R\\z=0}}=0. \tag{36}$$

将式(26)，(27)，(28)代入式(33)中，可以看到，式(36)显然成立，而由式(35)则可得到：

$$\begin{aligned}-m\gamma_0R\dot{\theta}_0^2=&\frac{(\nu_1-\nu_2)mc^2}{R}\left[4K+\left(\frac{P}{2}-\frac{a}{a+b}\right)-\frac{3}{128}\frac{P}{}\frac{a^2+b^2}{R^2}-\frac{3}{256}\frac{a^2+4ab+b^2}{R^2}\right]+\\ &+\frac{\nu_1\beta_1mc^2\dot{\theta}_0}{c}\left[\left(\frac{P}{2}+\frac{a}{a+b}\right)+\frac{P}{128}\frac{a^2-3b^2}{R^2}+\frac{1}{256}\frac{25a^3+29a^2b-23ab^2-11b^3}{(a+b)R^2}\right]+\\ &+\frac{R\dot{\theta}_0}{c}eH_z(R,0).\end{aligned} \tag{37}$$

这里，用足标"0"表示在电子环中心线处的值。

电子在圆环中运动，由于存在横向运动，处在圆环中心线上的电子与其他电子的速度不同，相对论因子也不同。假定在圆环中心线上电子的角向速度为 $R\dot{\theta}_0=v_0$，相对论因子为 γ_0。

根据能量守恒定律和角动量守恒定律得：

$$mc^2\gamma_0+e\varphi_0=mc^2\gamma+e\varphi, \tag{38}$$

$$R\left[m\gamma_0R\dot{\theta}_0+\frac{e}{c}(A_{\theta_0}+A^e_{\theta_0})\right]=\gamma\left[m\gamma r\dot{\theta}+\frac{e}{c}(A_\theta+A^e_\theta)\right]. \tag{39}$$

这里，φ 和 A_θ 由式(24)和(25)所定义，A_θ^e 为外磁场 $\overrightarrow{H}$ 所对应的矢势 $\overrightarrow{A_\theta^e}$ 在 $\overrightarrow{i_\theta}$ 方向的分量，经过一些计算后，可以得到：

$$\gamma \simeq \gamma_0\left\{1+\frac{\nu_1-\nu_2}{\gamma_0}\left[4K-\left(\frac{a}{a+b}-\frac{P}{2}\right)-\frac{3P}{128}\frac{a^2+b^2}{R^2}-\frac{3}{256}\frac{a^2+4ab+b^2}{R^2}\right]\left(\frac{x}{R}\right)\right\}, \tag{40}$$

$$\gamma\dot{\theta}=R\dot{\theta}_0(1+\alpha).$$

上式中，α 是一个三级小量，在我们的近似计算中，只考虑到二级近似，因此，α 可以忽略不计。$\dot{\theta}$ 是角速度，今后用 ω 来表示，$\dot{\theta}_0$ 则用 ω_0 来表示。

求解(37)式得：

$$H_z(R,0)=-\frac{mc^2}{eR}\beta_1\gamma_0\left\{1+\frac{\mu_1-\mu_2}{\beta_1^2}\left[4K+\left(\frac{P}{2}-\frac{a}{a+b}\right)-\frac{3P}{128}\frac{a^2+b^2}{R^2}-\right.\right.$$
$$\left.-\frac{3}{256}\frac{a^2+4ab+b^2}{R^2}\right]+\mu_1\left[\left(\frac{P}{2}+\frac{a}{a+b}\right)+\frac{P}{128}\frac{a^2-3b^2}{R^2}+\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{256}\frac{25a^3+29a^2b-23ab^2-11b^3}{(a+b)R^2}\right]\right\}. \tag{41}$$

在这里，μ_1 和 μ_2 分别表示：

$$\mu_1=\frac{\nu_1}{\gamma_0},\quad \mu_2=\frac{\nu_2}{\gamma_0}. \tag{42}$$

现在，将已得的结果(26)，(27)，(30)，(40)，(41)等式，代入横向运动方程式(33)中去，只考虑到线性项，我们即可得到电子环中电子的横向振荡方程：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}(m\gamma\dot{x})+m\gamma_0\omega_0^2\theta_r^2x=0,\\&\frac{d}{dt}(m\gamma\dot{z})+m\gamma_0\omega_0^2\theta_z^2z=0.\end{aligned}\right\} \tag{43}$$

在这里，参数 θ_r^2 和 θ_z^2 可由电子的横向运动方程式(33)定出：

$$\theta_r^2=1-(\mu_1-\mu_2)\left[4K+\left(\frac{P}{2}-\frac{a}{a+b}\right)-\frac{3P}{128}\frac{a^2+b^2}{R^2}-\frac{3}{256}\frac{a^2+4ab+b^2}{R^2}\right]-$$
$$-\frac{\mu_1-\mu_2}{\beta_1^2}\left[4(Y-K)+4\frac{R^2}{a(a+b)}-\frac{5P}{8}+\frac{1}{8}\frac{11a^2+12ab+3b^2}{(a+b)^2}\right]+$$
$$+\mu_1\left[\frac{4R^2}{a(a+b)}+\frac{3P}{8}+\frac{1}{8}\frac{3a^2-4ab-5b^2}{(a+b)^2}\right]-n\left\{1+\frac{\mu_1-\mu_2}{\beta_1^2}\left[4K+\left(\frac{P}{2}-\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{a}{a+b}\right)-\frac{3P}{128}\frac{a^2+b^2}{R^2}-\frac{3}{256}\frac{a^2+4ab+b^2}{R^2}\right]+\mu_1\left[\left(\frac{P}{2}+\frac{a}{a+b}\right)+\frac{P}{128}\frac{a^2-3b^2}{R^2}+\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{256}\frac{25a^3+29a^2b-23ab^2-11b^3}{(a+b)R^2}\right]\right\}, \tag{44}$$

$$\theta_z^2=-\frac{\mu_1-\mu_2}{\beta_1^2}\left[-4Y+4\frac{R^2}{b(a+b)}+\frac{P}{8}-\frac{1}{8}\frac{3a^2+4ab+3b^2}{(a+b)^2}\right]+$$
$$+\mu_1\left[4\frac{R^2}{b(a+b)}-\frac{3P}{8}-\frac{1}{8}\frac{3a^2-4ab-5b^2}{(a+b)^2}\right]+$$
$$+n\left\{1+\frac{\mu_1-\mu_2}{\beta_1^2}\left[4K+\left(\frac{P}{2}-\frac{a}{a+b}\right)-\frac{3P}{128}\frac{a^2+b^2}{R^2}-\frac{3}{256}\frac{a^2+4ab+b^2}{R^2}\right]+\right.$$

$$+\mu_1\left[\left(\frac{P}{2}+\frac{a}{a+b}\right)+\frac{P}{128}\frac{a^2-3b^2}{R^2}+\frac{1}{256}\frac{25a^3+29a^2b-23ab^2-11b^3}{(a+b)R^2}\right]\Big\}. \quad (45)$$

现将（44）式和(45)式中，$\frac{a^2}{R^2}$和$\frac{b^2}{R^2}$量级的小量加以忽略，并进行整理得：

$$\theta_r^2=1+\mu_1(P-1)-4\frac{\mu_1-\mu_2}{\beta_1^2}(Y-K)-(\mu_1-\mu_2)\left[4K+\left(\frac{P}{2}-\frac{a}{a+b}\right)\right]-$$
$$-\frac{1}{\beta_1^2}\left(\frac{\mu_1}{\gamma^2}-\mu_2\right)\left[\frac{4R^2}{a(a+b)}-\frac{5P}{8}+\frac{1}{8}\frac{11a^2+12ab+3b^2}{(a+b)^2}\right]-$$
$$-n\left[1+\mu_1P+4\frac{\mu_1-\mu_2}{\beta_1^2}K+\frac{1}{\beta_1^2}\left(\frac{\mu_1}{\gamma^2}-\mu_2\right)\left(\frac{P}{2}-\frac{a}{a+b}\right)\right], \quad (46)$$

$$\theta_z^2=-\mu_1\left(\frac{P}{2}-\frac{b}{a+b}\right)+4\frac{\mu_1-\mu_2}{\beta_1^2}Y-\frac{1}{\beta_1^2}\left(\frac{\mu_1}{\gamma^2}-\mu_2\right)\left[\frac{4R^2}{b(a+b)}+\right.$$
$$\left.+\frac{P}{8}-\frac{1}{8}\frac{3a^2+4ab+3b^2}{(a+b)^2}\right]+n\left[1+\mu_1P+4\frac{\mu_1-\mu_2}{\beta_1^2}K+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\beta_1^2}\left(\frac{\mu_1}{\gamma^2}-\mu_2\right)\left(\frac{P}{2}-\frac{a}{a+b}\right)\right]. \quad (47)$$

要使电子环中电子的振荡是稳定的，由电子的横向振荡方程式（43）可知，θ_r^2和θ_z^2必须满足下述条件：

$$\left.\begin{array}{l}\theta_r^2>0,\\ \theta_z^2>0.\end{array}\right\} \quad (48)$$

在电子环形成初期，电子环俘获的离子很少，离子的聚焦效应可以忽略，电子环的聚焦主要依靠外磁场来实现。根据电子环电子稳定振荡的条件式(48)，利用（46）式和(47)式的结果，忽略小量，即可得出对磁场指数 n 的要求：

$$\left.\begin{array}{l}n<\dfrac{1+\mu_1\left[\dfrac{P}{2}-\dfrac{b}{a+b}-\dfrac{4}{\beta_1^2}\left(Y-\dfrac{K}{\gamma^2}\right)-\dfrac{4R^2}{\beta_1^2\gamma^2a(a+b)}\right]}{1+\mu_1\left(P+\dfrac{4K}{\beta_1^2}\right)},\\ n>\dfrac{\mu_1\left[\dfrac{P}{2}-\dfrac{b}{a+b}-\dfrac{4Y}{\beta_1^2}+\dfrac{4R^2}{\beta_1^2\gamma^2a(a+b)}\right]}{1+\mu_1\left(P+\dfrac{4K}{\beta_1^2}\right)}.\end{array}\right\} \quad (49)$$

当电子环被外磁场压缩到半径很小时，外磁场指数 n 趋于零，静电镜像场的效应也可忽略不计，这时电子环的聚焦主要靠离子的作用实现。由电子环电子稳定振荡的条件式(48)，利用（46）式和（47）式的结果，即可得到：

$$1+\mu_1\left(\frac{P}{2}-\frac{b}{a+b}\right)+\mu_2\left(\frac{P}{2}-\frac{a}{a+b}\right)-\frac{4R^2}{\beta_1^2a(a+b)}\left(\frac{\mu_1}{\gamma^2}-\mu_2\right)>0,$$
$$-\mu_1\left(\frac{P}{2}-\frac{b}{a+b}\right)-\frac{4R^2}{\beta_1^2b(a+b)}\left(\frac{\mu_1}{\gamma^2}-\mu_2\right)>0.$$

在上面两个不等式中，只要满足后一个，前一个自然就满足了，由后一个不等式得：

$$\mu_2-\frac{\mu_1}{\gamma^2}>\mu_1\left(\frac{P}{2}-\frac{b}{a+b}\right)\frac{\beta_1^2b(a+b)}{4R^2}.$$

由此便可得到电子-离子环的自聚焦条件：

$$
\frac{N_2}{N_1}=\frac{\mu_2}{\mu_1}>\frac{1}{\gamma^2}+\left(\frac{P}{2}-\frac{b}{a+b}\right)\frac{\beta_1^2 b(a+b)}{4R^2}. \tag{50}
$$

六、讨　　论

在前面已作了一系列分析，现在我们给出一些数值进行计算（计算结果列于表 1—5），并加以讨论。

我们取俘获室器壁半径

$$R_e=27 \text{ 厘米},$$

并假定电子环的平均半径 R，和其椭圆横截面的两个半轴 a 及 b 之间的关系为

$$R=5(a+b),$$

这样，由(18)式可得：

$$P=2\ln\frac{16R}{a+b}-1=2\ln 80-1\approx 7.764.$$

从 (26) 式可以看出，电子环自身的空间电荷效应引起电子环的散焦。而电子环在无限长金属圆柱体上产生的静电镜像场，在轴向引起聚焦，在径向引起散焦。表 1 和表 2 的计算也表明了这一点。同时看到，在电子环形成初期，由于电子环平均半径 R 与俘获室器壁半径 R_e 相差不多，这时静电镜像场和空间电荷电场仅相差一个数量级，因此，利用静电镜像场可以起到稳定电子环的作用。当电子环在后期被压缩到半径很小时，由于电子环平均半径 R 与俘获室器壁半径 R_e 相差较大，也就是电子环离器壁较远，这时静电镜像场和空间电荷场相差三个数量级，可以忽略不计，而电子环的稳定要依靠其俘获的离子或其他办法来实现。

表 1　电子环形成时的自场

$N_1=1\times10^{14}$，$N_2\simeq 0$，$\beta_1\simeq 1$，$R=21.43$ 厘米，$S=1.26$，$K=0.5204$，$Y=1.915$，$V=6.241$，$k=\frac{a}{b}$。

x		a	$-a$	0	0	0
z		0	0	0	b	$-b$
E_r^s[CGSE]	$k=1$	-4.58×10	-2.71×10	-3.46×10	-3.26×10	-3.26×10
E_z^s[CGSE]	$k=1$	0	0	0	1.27×10	-1.27×10
E_r^0[CGSE]	$k=3$	-3.66×10^2	2.86×10^2	-0.52×10^2	-0.51×10^2	-0.51×10^2
	$k=1$	-3.73×10^2	2.82×10^2	-0.56×10^2	-0.52×10^2	-0.52×10^2
	$k=\frac{1}{3}$	-3.83×10^2	2.76×10^2	-0.60×10^2	-0.51×10^2	-0.51×10^2
E_z^0[CGSE]	$k=3$	0	0	0	-3.33×10^2	3.33×10^2
	$k=1$	0	0	0	-3.34×10^2	3.34×10^2
	$k=\frac{1}{3}$	0	0	0	-3.35×10^2	3.35×10^2
B_r^0[GAUSS]	$k=3$	0	0	0	-3.30×10^2	3.30×10^2
	$k=1$	0	0	0	-3.28×10^2	3.28×10^2
	$k=\frac{1}{3}$	0	0	0	-3.25×10^2	3.25×10^2
B_z^0[GAUSS]	$k=3$	2.79×10^2	-4.04×10^2	-0.77×10^2	-0.70×10^2	-0.70×10^2
	$k=1$	2.70×10^2	-4.05×10^2	-0.73×10^2	-0.69×10^2	-0.69×10^2
	$k=\frac{1}{3}$	2.68×10^2	-4.02×10^2	-0.69×10^2	-0.66×10^2	-0.66×10^2

从（27）式可以看出，由于电子环内电子的圆周运动，所产生的自磁场，能使电子环聚焦。当电子的运动速度接近光速时，电子环自磁场产生的聚焦力，接近于其自电场产生的散焦力。这在表 1 和表 2 中，也可得到具体的数值比较。

表 2　电子环压缩后的自场

$N_1=1\times10^{14}$，$N_2\simeq0$，$\beta_1\simeq1$，$R=4.5$ 厘米，$S=6$，$K=1.549\times10^{-3}$，$Y=3.134\times10^{-3}$，$V=1.446\times10^{-4}$。

x		a	$-a$	0	0	0
z		0	0	0	b	$-b$
E_r^i[CGSE]	$k=1$	-2.58	-2.10	-2.33	-2.33	-2.33
E_z^i[CGSE]	$k=1$	0	0	0	0.47	-0.47
E_r^0[CGSE]	$k=3$	-8.29×10^3	6.48×10^3	-1.18×10^3	-1.16×10^3	-1.16×10^3
	$k=1$	-8.45×10^3	6.39×10^3	-1.27×10^3	-1.18×10^3	-1.18×10^3
	$k=\frac{1}{3}$	-8.68×10^3	6.24×10^3	-1.37×10^3	-1.15×10^3	-1.15×10^3
E_z^0[CGSE]	$k=3$	0	0	0	-7.56×10^3	7.56×10^3
	$k=1$	0	0	0	-7.57×10^3	7.57×10^3
	$k=\frac{1}{3}$	0	0	0	-7.59×10^3	7.59×10^3
B_r^0[GAUSS]	$k=3$	0	0	0	-7.49×10^3	7.49×10^3
	$k=1$	0	0	0	-7.43×10^3	7.43×10^3
	$k=\frac{1}{3}$	0	0	0	-7.36×10^3	7.36×10^3
B_z^0[GAUSS]	$k=3$	6.34×10^3	-9.16×10^3	-1.74×10^3	-1.58×10^3	-1.58×10^3
	$k=1$	6.12×10^3	-9.17×10^3	-1.66×10^3	-1.58×10^3	-1.58×10^3
	$k=\frac{1}{3}$	6.06×10^3	-9.12×10^3	-1.56×10^3	-1.50×10^3	-1.50×10^3

从表 1 和表 2 可以看到，电子环椭圆横截面之径向半轴 a 和轴向半轴 b 的比值 k，对电子环自场的影响并不大。

表 3　电子环形成时对外磁场的要求

$N_1=1\times10^{14}$，$R=21.43$ 厘米，$\nu_1=0.20925$，$S=1.26$，$K=0.5204$，$Y=6.241$。

γ	k	n 的允许范围	
		无镜像场	有镜像场
3	3	不可能	不可能
	1	不可能	不可能
	$\frac{1}{3}$	不可能	不可能
4	3	$0.466<n<0.516$	$0.150<n<0.288$
	1	不可能	不可能
	$\frac{1}{3}$	不可能	不可能
5	3	$0.291<n<0.694$	$0.0357<n<0.417$
	1	$0.371<n<0.598$	$0.110<n<0.327$
	$\frac{1}{3}$	不可能	不可能
6	3	$0.204<n<0.782$	$-0.0113<n<0.536$
	1	$0.250<n<0.723$	$0.0316<n<0.480$
	$\frac{1}{3}$	$0.400<n<0.559$	$0.173<n<0.326$

在电子环形成初期，电子环俘获的离子很少，其聚焦要靠外磁场来实现。当电子环的电子数量和几何尺寸给定后，对于不同能量的电子，也就是不同的γ，要求外磁场指数n的范围也不同，这可由（49）式求得。表3的计算结果表明：电子的能量越高，电子环就越容易聚焦；电子环椭圆横截面的径向半轴a与轴向半轴b的比值k越大，电子环也越容易聚焦，换句话说，电子环的径向比轴向要稳定。

表3的计算结果还表明：镜像场能起到一定的聚焦作用。尽管有了镜像场后，对外磁场指数n要求的允许范围并不放宽，但是，对n所要求的数值却小了。

反过来，从（49）式可以计算，当给定外磁场指数n后，可以求得在电子环形成初期，对于不同能量的电子，其允许数目不同。表4的计算结果也符合表3计算结果所得到的结论，也就是电子的能量越高，电子环椭圆横截面的径向半轴a与轴向半轴b的比值k越大，电子环就越容易聚焦，也就是允许电子环内的电子数目越多。

表 4　电子环形成时对电子数的要求

$n=0.2$，$R=21.43$ 厘米，$K=0.5204$，$Y=6.241$。

γ	N_1 的最大允许值					
	无镜像场			有镜像场		
	$k=3$	$k=1$	$k=\frac{1}{3}$	$k=3$	$k=1$	$k=\frac{1}{3}$
3	1.53×10^{13}	1.07×10^{13}	0.56×10^{13}	0.297×10^{14}	0.162×10^{14}	0.068×10^{14}
4	3.49×10^{13}	2.52×10^{13}	1.38×10^{13}	1.15×10^{14}	0.584×10^{14}	0.195×10^{14}
5	6.26×10^{13}	4.70×10^{13}	2.62×10^{13}	1.62×10^{14}	1.29×10^{14}	0.486×10^{14}
6	9.74×10^{13}	7.60×10^{13}	4.41×10^{13}	2.30×10^{14}	1.89×10^{14}	1.22×10^{14}

表4的计算结果同样还表明：镜像场能起到一定的聚焦作用。在相同的条件下，考虑到镜像场的作用，能允许环内电子数多一些。

当电子环被外磁场压缩到半径很小时，外磁场指数n趋于零，静电镜像场的效应也可忽略不计，这时电子环的聚焦，要依靠其俘获的离子或其他方法来实现。对于环内离子数与电子数之比，已由（50）式给出。此式还表明，这个比值仅与电子的能量、以及电子环椭圆横截面径向半轴a和轴向半轴b的比值k有关，而与电子环的尺寸大小无关。表5的结果进一步表明，电子的能量越高，电子环椭圆横截面的径向半轴a与轴向半轴b之比值k越大，电子环就越容易聚焦，也就是允许电子环所俘获的离子可以少一些。

表 5　电子环压缩后对离子数的要求

γ	$\frac{N_2}{N_1}$ 的最小允许值				
	$k=3$	$k=2$	$k=1$	$k=\frac{1}{2}$	$k=\frac{1}{3}$
10	1.90×10^{-2}	2.17×10^{-2}	2.67×10^{-2}	3.12×10^{-2}	3.33×10^{-2}
20	1.16×10^{-2}	1.43×10^{-2}	1.94×10^{-2}	2.39×10^{-2}	2.59×10^{-2}
30	1.02×10^{-2}	1.29×10^{-2}	1.80×10^{-2}	2.25×10^{-2}	2.46×10^{-2}
40	0.97×10^{-2}	1.24×10^{-2}	1.75×10^{-2}	2.21×10^{-2}	2.41×10^{-2}
50	0.95×10^{-2}	1.22×10^{-2}	1.73×10^{-2}	2.18×10^{-2}	2.39×10^{-2}

以上的讨论是在一定的假定下进行的，也就是电子在环内是均匀分布的，电子环的平均半径R与其椭圆横截面两半轴之和$a+b$的比值是个常数，在这里取了5。这两点并不

能真实地反映电子环运动的实际过程，因此本文的讨论只给出一个定性的结论。

附　　录

$$\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}<1} \ln\frac{8R}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy=\pi ab\left(\ln\frac{16R}{a+b}+\frac{1}{2}\right).$$

$$\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}<1} x^2\ln\frac{8R}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy=\frac{\pi}{4}a^3b\left(\ln\frac{16R}{a+b}+\frac{1}{4}\,\frac{3b-a}{a+b}\right).$$

$$\iint\limits_{\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}<1} \ln\frac{x'^2+y'^2}{(x-x')^2+(y-y')^2}\,dx'\,dy'=-2\pi\frac{1}{a+b}(bx^2+ay^2).$$

$$\iint\limits_{\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}<1} x'\ln\frac{x'^2+y'^2}{(x-x')^2+(y-y')^2}\,dx'\,dy'$$

$$=2\pi\frac{ab}{a+b}x\left[a-\frac{2a+b}{3a(a+b)}x^2-\frac{a}{b(a+b)}y^2\right].$$

$$\iint\limits_{\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}<1} x'^2\ln\frac{x'^2+y'^2}{(x-x')^2+(y-y')^2}\,dx'\,dy'=\pi\frac{ab}{(a+b)^2}\left[a^2(x^2-y^2)-\right.$$

$$\left.-\frac{3a^2+3ab+b^2}{3a(a+b)}x^4-\frac{2a^2}{b(a+b)}x^2y^2+\frac{a^2}{3b(a+b)}y^4\right].$$

参　考　文　献

[1] И. С. Градштейн и др., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Москва, 1971, ст. 919, 920.